Systèmes de particules, masse-ressorts, contraintes, solides

Nicolas Holzschuch
Cours d'Option Majeure 2
Nicolas.Holzschuch@imag.fr

Plan du cours

- Systèmes de particules
- Systèmes masse-ressort
- Contraintes
- Animations de solides

Sources

- Très inspiré par le cours:
  - A. Witkin & D. Baraff, *Physically Based Modelling,* cours à Siggraph 2001

http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001/index.html

  (pointeur sur la page web)
- Et surtout :
  - *Particle Dynamics*
  - *Rigid Body Dynamics*
  - *Constrained Dynamics*

Systèmes de particules

- Ensemble de particules
  - Position, vitesse, masse
- Déplacement: équations de la dynamique
  - Somme des forces = masse * accélération
- *Générateur* : source de particules
- *Durée de vie* limitée
- Très utiles pour :
  - Poussière, fumée, étincelles, flammes, liquides…

Déplacement d'une particule

- Masse m, position x, vitesse v

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(t)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}F(x,v,t)$$

- Équation différentielle :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \qquad f(\mathbf{X},t) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}F(x,v,t) \end{bmatrix}$$

Équation différentielle

- Pour une particule :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \qquad f(\mathbf{X},t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \frac{1}{m}F_x(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m}F_y(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m}F_z(\mathbf{X},t) \end{bmatrix}$$

Pour toutes les particules

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \\ v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \\ p_x^2 \\ p_y^2 \\ p_z^2 \\ v_x^2 \\ v_y^2 \\ v_z^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad f(\mathbf{X},t) = \begin{bmatrix} v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \\ \frac{1}{m} F_x^1(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m} F_y^1(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m} F_z^1(\mathbf{X},t) \\ v_x^2 \\ v_y^2 \\ v_z^2 \\ \frac{1}{m} F_x^2(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m} F_y^2(\mathbf{X},t) \\ \frac{1}{m} F_z^2(\mathbf{X},t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Implémentation

- Structure `particule:`
  - Masse `m`, position `x`, vitesse `v`, force `f`
  - Version simple :

```
typedef struct {
      float m;
      float x[3];
      float v[3];
      float f[3];
} *Particule;
```

  - Vecteur global `particules` stocke toutes les particules

Version moins simple

- Tableau des positions
- Particule = index `i` dans tableau des positions `X`

```
X[i+0] ⇔ particule.position.x
X[i+1] ⇔ particule.position.y
X[i+2] ⇔ particule.position.z
X[i+3] ⇔ particule.vitesse.x
X[i+4] ⇔ particule.vitesse.y
X[i+5] ⇔ particule.vitesse.z
```

- Calcul de la fonction dérivée :

```
F[i+0] ⇔ particule.vitesse.x
F[i+1] ⇔ particule.vitesse.y
F[i+2] ⇔ particule.vitesse.z
F[i+3] ⇔ particule.force.x/m[i]
F[i+4] ⇔ particule.force.y/m[i]
F[i+5] ⇔ particule.force.z/m[i]
```

Quel genre de force ?

- `Force` est une structure
  - Calcule la fonction dérivée pour chaque particule
  - Somme des forces dans `particule.force`
- Vecteur global `Forces` pour toutes les forces
- Forces :
  - Unaires, binaires, à distance…
  - Constantes, dépendant de position, vitesse…

Force unaire : gravitation

$$\text{Gravité} : \vec{f}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i G \end{bmatrix}$$

- Lié seulement à la masse de la particule

  *f(***X***,t)* = constante

- Fumée, flammes : la gravité pointe vers le haut!

Forces : amortissement

$$\text{Amortissement} : \vec{f}_i = -d\vec{v}_i$$

- La force ne dépend que de la vitesse
- Amortissement visqueux
- Force qui *s'oppose* au mouvement
- Fait baisser l'énergie : stabilise le système
  - En petites quantités, stabilise la solution EDO
  - Grandes quantités : freine tout, mélasse

Forces : champs vectoriels

Champ vect. : $\vec{f}_i = f(\vec{x}_i, t)$

- La force ne dépend que de la position
- Fonctions quelconques :
  - Vent
  - Courants
  - Attractions/répulsions
  - Tourbillons
- Éventuellement dépendant du temps
- Note : augmente l'énergie du système, besoin amortir

Forces : attraction spatiale

Attraction spatiale : $\vec{f}_i = \sum_j f(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$

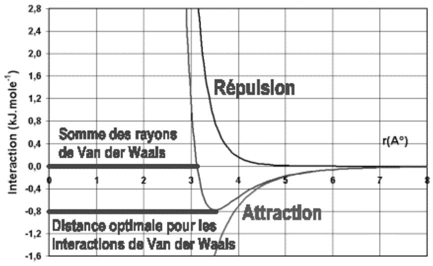
- Par exemple Lennard-Jones
- O(N^2) pour tester toutes les paires
  - Faible rayon d'action en général
  - Tests par *buckets* spatiaux

Lennard-Jones

Potentiel : $V(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \frac{\square_1}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^{12}} - \frac{\square_2}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^{6}}$

- Interaction entre molécules (Van der Waals)
  - Attraction en $1/r^6$, répulsion en $1/r^{12}$
- Fluides, écoulements…
- Rapport $\square_1/\square_2$: attraction, répulsion, équilibre
- Dérivée du potentiel : force de Lennard-Jones

Lennard-Jones

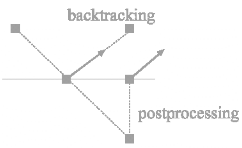


Forces : ressort

- Force classique des ressorts :
  $f(x_i)=-k(x_i-x_0)$
- Particule attirée par le point x_0
- Ressort de longueur nulle à l'équilibre

Collisions

- Pas de collisions entre particules
- Collisions avec l'environnement (sol, murs…)
- Itération dépasse la collision :
  - Pénétration
  - Recul ou interpolation

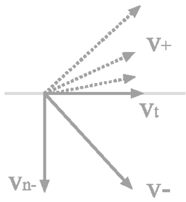


Effet d'une collision

- Vitesse tangentielle inchangée
- Vitesse normale retournée

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_n$$
$$\vec{v} \, \square \; \vec{v}_t \, \square \square \vec{v}_n$$

  – Coefficient de restitution



Origine des particules

- Générateurs :
  – Attachés au modèle
- Flux de création : particules/seconde
  – t_{last}, date dernière création de particule

$$n = \square(t \, \square \, t_{\text{last}})/\text{rate}\square$$

  – Création n particules, $t_{\text{last}}=t$ si $n > 0$
- Distribution (aléatoire) vitesse/position
  – Si $n > 1$, étalement de valeurs

Durée de vie des particules

- Date de création pour chaque particule
- Durée de vie donnée
- Age de la particule :
  – Suppression des particules après la durée de vie
  – Changement de couleur (refroidissement)
  – Changement d'opacité
- Parfois supprimer les particules qui sortent de l'écran

À chaque étape

- Ajuster l'état des particules
  - Éliminer les particules trop âgées
  - Collisions
  - Créer les nouvelles particules
  - Recalculer les index des particules

Systèmes de particules en pratique

- Grand nombre de particules : 10^4, 10^5…
- Code optimisé :
  - Travail direct dans les tableaux
  - Tableau de taille fixé (nb. max particules)
    - Pas besoin de création/destruction, marquer si actif
  - Forces principales « en dur » (gravité…)
- Méthode de résolution simple (Euler ?)
- À pas constant
  - Un pas par image ?

Plan du cours

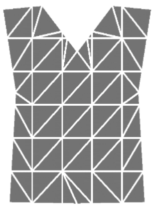
- Systèmes de particules
- Systèmes masse-ressort
- Contraintes
- Animations de solides

Systèmes masse-ressort

- Idem systèmes de particules
  - Particules appelées « masses »
- Structure donnée
- Les masses font partie du modèle :
  - Pas de création, pas de destruction, pas d'âge
- Ressorts qui relient les masses :
  - Les forces ne sont plus universelles
  - Chaque force connaît les masses sur lesquelles elle agit

Systèmes masse-ressort

- Points en ligne :
  - Cheveux, ressorts, chaines…
- Points sur une surface :
  - Habits, tissus, peau…
- Points dans un réseau 3D :
  - Structures semi-rigides
  - Modèles souples, muscles,…



Quels ressorts ?

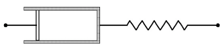
- Ressort vers un point fixe :
  - Attire la masse vers le point x_0
  - Oscillations autour de l'origine

$$f(\mathbf{x}) = -k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Ressort amorti

$$f(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{v}}) = -k_s\vec{\mathbf{r}} - k_d(\vec{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \qquad \begin{aligned}\vec{\mathbf{r}} &= \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}\\ \hat{\mathbf{r}} &= \vec{\mathbf{r}}/\|\vec{\mathbf{r}}\|\end{aligned}$$

- Ressort plus freinage
- Suspension de voiture
- Ralentit les mouvements dans la direction du ressort



Ressort amorti

- Rapport k_s/k_d détermine :
  - Sur-amortissement, sous-amortissement, amortissement critique
  - … si le système est isolé
- Toujours un certain amortissement

Longueur au repos non-nulle

- Ressort avec longueur au repos non-nulle
  - Pousse/tire la masse à une distance d de $\mathbf{x}_0$

$$f(\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{v}}) = -k_s(r-d)\hat{\mathbf{r}} - k_d(\vec{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}$$

$$r = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}\|$$
$$\hat{\mathbf{r}} = \left(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}\right)/r$$

Ressort entre deux masses

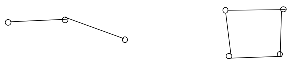
$$f_1(\vec{\mathbf{x}}_1,\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{x}}_2,\vec{\mathbf{v}}_2) = -k_s(r - d)\hat{\mathbf{r}} - k_d((\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2)\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}$$
$$f_2(\vec{\mathbf{x}}_1,\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{x}}_2,\vec{\mathbf{v}}_2) = -f_1(\vec{\mathbf{x}}_1,\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{x}}_2,\vec{\mathbf{v}}_2)$$

$$r = \left\|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\right\|$$
$$\hat{\mathbf{r}} = \left(\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\right)/r$$

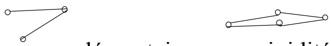
- Symétrique
- Forces radiales
- Pousse/tire les masses à une distance *d* l'une de l'autre

Construction avec masse-ressorts

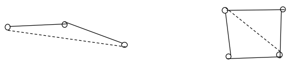
- Connexion des masses pour modéliser



- Les objets peuvent se plier, s'écraser, se tordre



- Liaisons supplémentaires pour rigidité



- Difficile d'avoir le bon comportement

Masse-ressort

- On peut tout modéliser :
  - Tissus, solides, objets mous, semi-rigides…
  - Rigidité variable
- En théorie, c'est parfait :
  - Si distance entre masses=dist. intra-moléculaires
- En pratique, c'est pas idéal :
  - Parfait si on ne veut modéliser que de la gelée
  - Objets trop rigides :
    - Divergence, petit pas, temps de calcul prohibitif

Modélisation énergétique

- Plus simple que modélisation masse-ressort
- Fonction énergétique générale :
  - S'applique à tout le modèle
  - Dépend de la position
  - Décrit l'état idéal
- Potentiel lié à cette énergie
- Force dérivant du potentiel
- Appliquée aux particules

Modélisation énergétique

- Fonction de comportement
  - Dépendant seulement de la position des points
    - Pas de la vitesse
  - $\mathbf{C}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$
  - $\mathbf{C} = 0$ à l'équilibre
- Énergie de déformation liée à la fonction
  - $E = 1/2\ k_s\ \mathbf{C}^2$
  - E = 0, système à l'équilibre
  - E > 0, énergie de déformation

Force liée au potentiel

- Force = - gradient de l'énergie potentielle

$$
\begin{aligned}
f_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} E(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \\
&= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}\left(\frac{1}{2} k_s \mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)^2\right) \\
&= -k_s \mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_i}
\end{aligned}
$$

Force liée au potentiel

- Avec amortissement :

$$f_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) = \square \square k_s \mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \square k_d \frac{d}{dt}\mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \square \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_i}$$

$$= \square \square k_s \mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \square k_d \square_j \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{v}_j \square \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_i}$$

- Description simple d'un système complex
- Reste à écrire le potentiel…

Exemples : ressort standard

$$C(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) = \|\mathbf{x}_0 \square \mathbf{x}_1\| \square d = r \square d$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\mathbf{x}_0 \square \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_0 \square \mathbf{x}_1\|} = \hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\mathbf{x}_1 \square \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0 \square \mathbf{x}_1\|} = \square\hat{\mathbf{r}}$$

$$f_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) = \square \square k_s C(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) \square k_d \square_j \frac{\partial C(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{v}_j \square \frac{\partial C(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_i}$$

$$= \left(\square k_s (r \square d) \square k_d \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_1 \square \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_2\right)\right)\hat{\mathbf{r}}$$

Exemples : triangle d'aire constante

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b} \square \mathbf{a}) \square (\mathbf{c} \square \mathbf{a}) \square A$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}{\partial \mathbf{a}} = R^{90}(\mathbf{c} \square \mathbf{b})$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}{\partial \mathbf{b}} = R^{90}(\mathbf{a} \square \mathbf{c})$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} = R^{90}(\mathbf{b} \square \mathbf{a})$$

on pose $\square = \left(\square k_s C(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \square k_d \left(\mathbf{v}_a \square (\mathbf{c} \square \mathbf{b}) + \mathbf{v}_b \square (\mathbf{a} \square \mathbf{c}) + \mathbf{v}_c \square (\mathbf{b} \square \mathbf{a})\right)\right)$

$$f_a(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{v}_a,\mathbf{v}_b,\mathbf{v}_c) = \square R^{90}(\mathbf{c} \square \mathbf{b})$$

$$f_b(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{v}_a,\mathbf{v}_b,\mathbf{v}_c) = \square R^{90}(\mathbf{a} \square \mathbf{c})$$

$$f_c(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{v}_a,\mathbf{v}_b,\mathbf{v}_c) = \square R^{90}(\mathbf{b} \square \mathbf{a})$$

Exemples, suite : tissus

- Modèle 2D, à plat
- Coupé suivant le patron
- Assemblé (cousu) sur le modèle
- Contraintes : le tissu résiste :
  - Étirement
  - Pliage
- Directions privilégiées
- Fonction d’énergie

Plan du cours

- Systèmes de particules
- Systèmes masse-ressort
- Contraintes
- Animations de solides

Contraintes multiples

- Contraintes :
  - Restriction sur la position d’un objet
  - Relation entre objets
- Contraintes permanentes
  - *Holonomes* : équation $C(...) = 0$
  - Articulations
- Contraintes temporaires
  - *Non-holonomes* : équation $C(...) \geq 0$
  - Contact, non-pénétration
  - Limites aux articulations

Masse-ressort ?

- Contraintes par ressorts : *pénalité*
  - Force de rappel vers position équilibre
- Pas idéal :
  - Si position correcte, force de rappel nulle
  - S'il y a une autre force (gravité) on s'écarte
  - Besoin ressort de rappel très rigide
    - Très instable
    - Pas garanti que ça marche

Satisfaction des contraintes

- Forces de contrainte
- D'abord calculer forces « normales » :
  - Gravité, ressorts, etc
- Puis calculer forces de contrainte
  - Prise en compte de l'effet des forces normales
- Plusieurs contraintes :
  - Chacune tient compte de l'effet des autres
- Ajouter forces de contraintes aux autres forces
  - Simulation normale

Forces de contrainte

- Contrainte : $C(\mathrm{x}) = 0$
  - Positions autorisées : $C(x) = 0$
- Vitesses autorisée : $\dot{C} = 0$
- Accélérations autorisées : $\ddot{C} = 0$
- Force supplémentaire (force de contrainte) :
  - Calculée pour vérifier $\ddot{C} = 0$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m}(f + \hat{f})$$

Conservation de l’énergie

- La force de contrainte ne doit modifier l’énergie du système :

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{x}}^2$$

$$\frac{d}{dt} E_c = m\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = f \cdot \dot{\mathbf{x}} + \hat{f} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

- La force de contrainte ne doit pas travailler

Cas à un corps : perle sur un fil

$$C(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}^2 \square d) = 0$$

$$\dot{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\ddot{C}(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\ddot{C}(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{m}(f + \hat{f}) \cdot \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\hat{f} \cdot \mathbf{x} = \square f \cdot \mathbf{x} \square m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

$$W = \hat{f} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \square \mathbf{x} | \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\hat{f} = \square \mathbf{x}$$

$$\square = \frac{\square f \cdot \mathbf{x} \square m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

Cas général

- Vecteur des positions des particules **q**
- Matrice des masses **M**, inverse **W**
- Vecteur des forces **Q**
- Contrainte **C**(**q**)
  - **C** vecteur à *m* éléments
  - **q** vecteur à 3*n* éléments

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{C} = \dot{\mathbf{C}} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}(\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{Q}})$$

$$\ddot{\mathbf{C}} = 0$$

Trouver la force de contrainte

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\mathbf{W}(\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{Q}}) = 0$$

$$\mathbf{J}\mathbf{W}\hat{\mathbf{Q}} = -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{Q}$$

$$W = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \forall \dot{\mathbf{x}} \,|\, \mathbf{J}\dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^T \lambda$$

$$\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{J}^T \lambda = -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{Q}$$

Stabilité numérique

$$\ddot{\mathbf{C}} = -k_s\mathbf{C} - k_d\dot{\mathbf{C}}$$

$$\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{J}^T \lambda = -\dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{Q} - k_s\mathbf{C} - k_d\dot{\mathbf{C}}$$

Plan du cours

- Systèmes de particules
- Systèmes masse-ressort
- Contraintes
- Animations de solides

Solides

- Presque pareil que les particules
  - m masse totale du solide
  - **r** position du centre de gravité
  - **v** vitesse du centre de gravité
- Plus termes de rotation :
  - **J** tenseur d'inertie (matrice en 3D, scalaire en 2D)
  - $\square$ orientation du solide (angle en 2D, quat en 3D)
  - $\square$ vitesse de rotation (scalaire en 2D, vecteur en 3D)
- Coordonnées du solide :
  - Origine en **r**, rotation $\square$ par rapport au monde
  - Pour tout solide, m et **J** décrivent mouvement

Tenseur d'inertie

- Déjà vu ?
- Description de la répartition des masses :

3D : $$\mathbf{J} = \square\square\square\square(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} r_y^2 + r_z^2 & \square r_x r_y & \square r_x r_z \\ \square r_x r_y & r_x^2 + r_z^2 & \square r_y r_z \\ \square r_x r_z & \square r_y r_z & r_x^2 + r_y^2 \end{bmatrix} d^3\mathbf{r}$$

2D : $$\mathbf{J} = \square\square\square(\mathbf{r})\mathbf{r}^2 d^2\mathbf{r}$$

- Densité $\square(\mathbf{r})$, **r** coordonnées par rapport au centre

Examples (densité uniforme)

- Rectangle :

$$I = \frac{1}{3} m\left(l^2 + w^2\right)$$

- Disque :

$$I = \frac{1}{2} mr^2$$

- Source de plein d'exercices marrants

Équation du mouvement des solides

- Équation du mouvement :
- T est le *couple*
  - Torque en anglais

$$\frac{d}{dt}x = v$$
$$\frac{d}{dt}\theta = \omega$$
$$\frac{d}{dt}v = m^{-1}F$$
$$\frac{d}{dt}\omega = \mathbf{J}^{-1}T$$

Couple (Torque)

- Chaque force f agit en un point du solide
  - $\mathbf{r}$ vecteur du centre de gravité au point d'action
  - solide.F += f
  - Solide.T += $\mathbf{r}\times f$
- Le moment fait tourner le solide
  - Si la force agit au centre de gravité, moment nul
    - Gravitation
  - Si la force pointe vers le centre de gravité, moment nul
  - f en $\mathbf{r}$ et $-f$ en $-\mathbf{r}$: force nulle, couple non-nul

Amortissement visqueux

- Dépend de la vitesse linéaire des points

$$\begin{aligned} v_r &= v + \omega \times \mathbf{r} && \text{(3D)} \\ &= v + \omega \mathbf{R}^{90}\mathbf{r} && \text{(2D)} \end{aligned}$$

Collisions

- Collisions entre deux solides
- Point de collision et vecteur normal
  - Pb complexe, nbx algorithmes
- Collision solide-particule :
  - Se ramener en coordonnées locales au solide
  - Collision en coordonnées locales
  - Impulsion sur le solide
  - Rebond de la particule

Impulsion

- Impulsion I, normale à la collision :

$$I = \frac{-(1+\varepsilon)(v_p - v_s)^{\perp}}{\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_s} + \frac{1}{J_s}(r_s^{tg})^2} \qquad \text{(2D)}$$

- Effet de l'impulsion :

$$v_p = v_p + \tfrac{1}{m_p} I$$
$$v_s = v_s + \tfrac{1}{m_s} I$$
$$\omega_s = \omega_s + \tfrac{1}{J_s}\left(r_s \times I\right)$$

Résumé

- Systèmes de particules
  - Fluides, poussière, flammes, fumée
  - Oiseaux, poissons…
- Systèmes masse-ressort :
  - Solides, tissus…
  - Énergie de déformation
- Solides :
  - Couple, moment, équation dynamique
  - Contraintes sur les solides
  - Impulsions

Encore très peu…

- Sujet à peine effleuré
- Contraintes de non-pénétration entre solides
- Quaternions pour les rotations
- Frottements solides