

# Systemes de particules, masse-ressorts, contraintes, solides

Nicolas Holzschuch

Cours d'Option Majeure 2

`Nicolas.Holzschuch@imag.fr`

# Plan du cours

- Systèmes de particules
- Systèmes masse-ressort
- Contraintes
- Animations de solides

# Sources

- Très inspiré par le cours:

- A. Witkin & D. Baraff,  
*Physically Based Modelling*,  
cours à Siggraph 2001

<http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001/index.html>

(pointeur sur la page web)

- Et surtout :

- *Particle Dynamics*
- *Rigid Body Dynamics*
- *Constrained Dynamics*

# Systemes de particules

- Ensemble de particules
  - Position, vitesse, masse
- Déplacement: équations de la dynamique
  - Somme des forces = masse \* accélération
- *Générateur* : source de particules
- *Durée de vie* limitée
- Très utiles pour :
  - Poussière, fumée, étincelles, flammes, liquides...

# Déplacement d'une particule

- Masse  $m$ , position  $x$ , vitesse  $v$

$$\frac{d}{dt} x(t) = v(t)$$

$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{1}{m} F(x, v, t)$$

- Équation différentielle :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad f(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m} F(x, v, t) \end{bmatrix}$$

# Équation différentielle

- Pour une particule :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad f(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \frac{1}{m} F_x(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_y(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_z(\mathbf{X}, t) \end{bmatrix}$$

# Pour toutes les particules

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \square p_x^1 \square \\ \square p_y^1 \square \\ \square p_z^1 \square \\ \square v_x^1 \square \\ \square v_y^1 \square \\ \square v_z^1 \square \\ \square p_x^2 \square \\ \square p_y^2 \square \\ \square p_z^2 \square \\ \square v_x^2 \square \\ \square v_y^2 \square \\ \square v_z^2 \square \\ \square \vdots \square \\ \square \vdots \square \end{array} \quad f(\mathbf{X}, t) = \begin{array}{c} \square v_x^1 \square \\ \square v_y^1 \square \\ \square v_z^1 \square \\ \square \frac{1}{m} F_x^1(\mathbf{X}, t) \square \\ \square \frac{1}{m} F_y^1(\mathbf{X}, t) \square \\ \square \frac{1}{m} F_z^1(\mathbf{X}, t) \square \\ \square v_x^2 \square \\ \square v_y^2 \square \\ \square v_z^2 \square \\ \square \frac{1}{m} F_x^2(\mathbf{X}, t) \square \\ \square \frac{1}{m} F_y^2(\mathbf{X}, t) \square \\ \square \frac{1}{m} F_z^2(\mathbf{X}, t) \square \\ \square \vdots \square \\ \square \vdots \square \end{array}$$

# Implémentation

- Structure `particule`:

- Masse  $m$ , position  $x$ , vitesse  $v$ , force  $f$

- Version simple :

```
typedef struct {  
    float m;  
    float x[3];  
    float v[3];  
    float f[3];  
} *Particule;
```

- Vecteur global `particules` stocke toutes les particules

# Version moins simple

- Tableau des positions
- Particule = index  $i$  dans tableau des positions  $X$

`X[i+0] [] particule.position.x`

`X[i+1] [] particule.position.y`

`X[i+2] [] particule.position.z`

`X[i+3] [] particule.vitesse.x`

`X[i+4] [] particule.vitesse.y`

`X[i+5] [] particule.vitesse.z`

- Calcul de la fonction dérivée :

`F[i+0] [] particule.vitesse.x`

`F[i+1] [] particule.vitesse.y`

`F[i+2] [] particule.vitesse.z`

`F[i+3] [] particule.force.x/m[i]`

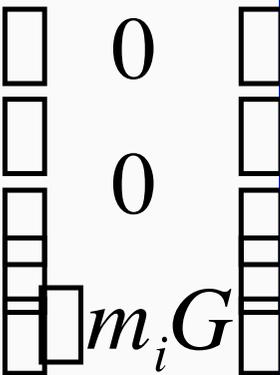
`F[i+4] [] particule.force.y/m[i]`

`F[i+5] [] particule.force.z/m[i]`

# Quel genre de force ?

- Force est une structure
  - Calcule la fonction dérivée pour chaque particule
  - Somme des forces dans `particule.force`
- Vecteur global `Forces` pour toutes les forces
- Forces :
  - Unaires, binaires, à distance...
  - Constantes, dépendant de position, vitesse...

# Force unaire : gravitation



The diagram shows a vertical stack of seven rectangular blocks. The top two blocks are white, and the bottom five are grey. To the left of the stack, the text 'Gravité :  $\vec{f}_i =$ ' is written. To the right, there are two columns of force vectors. The top two blocks have a '0' next to them. The bottom five blocks have a vector arrow pointing downwards, with the label  $m_i G$  next to the bottom-most block.

Gravité :  $\vec{f}_i =$

$m_i G$

- Lié seulement à la masse de la particule

$$f(\mathbf{X}, t) = \text{constante}$$

- Fumée, flammes : la gravité pointe vers le haut!

# Forces : amortissement

$$\text{Amortissement : } \vec{f}_i = -\gamma d\vec{v}_i$$

- La force ne dépend que de la vitesse
- Amortissement visqueux
- Force qui *s'oppose* au mouvement
- Fait baisser l'énergie : stabilise le système
  - En petites quantités, stabilise la solution EDO
  - Grandes quantités : freine tout, mélasse

# Forces : champs vectoriels

$$\text{Champ vect. : } \vec{f}_i = f(\vec{x}_i, t)$$

- La force ne dépend que de la position
- Fonctions quelconques :
  - Vent
  - Courants
  - Attractions/répulsions
  - Tourbillons
- Éventuellement dépendant du temps
- Note : augmente l'énergie du système, besoin amortir

# Forces : attraction spatiale

$$\text{Attraction spatiale : } \vec{f}_i = \sum_j f(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

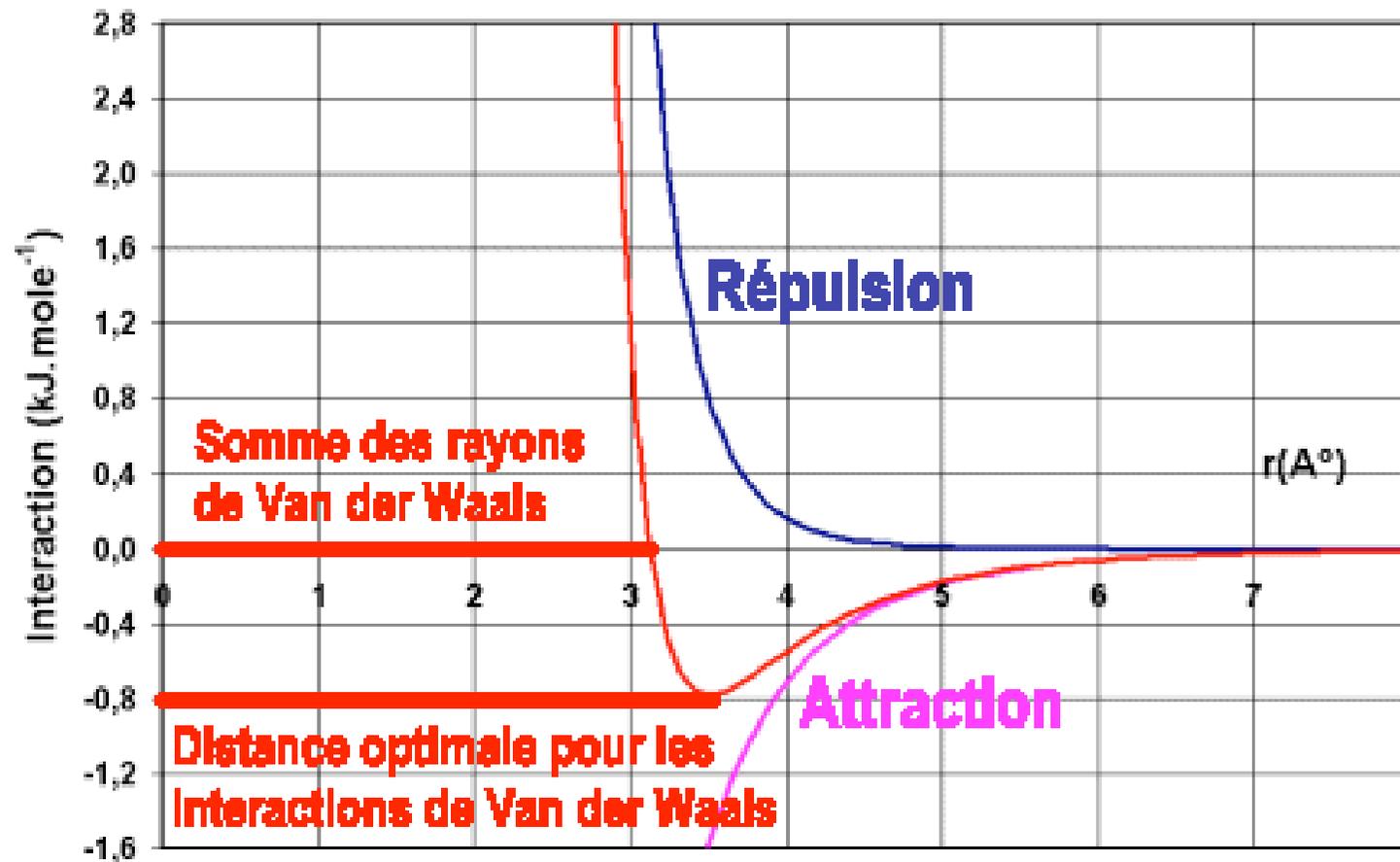
- Par exemple Lennard-Jones
- $O(N^2)$  pour tester toutes les paires
  - Faible rayon d'action en général
  - Tests par *buckets* spatiaux

# Lennard-Jones

$$\text{Potentiel : } V(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \frac{\epsilon_1}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^{12}} - \frac{\epsilon_2}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^6}$$

- Interaction entre molécules (Van der Waals)
  - Attraction en  $1/r^6$ , répulsion en  $1/r^{12}$
- Fluides, écoulements...
- Rapport  $\epsilon_1/\epsilon_2$  : attraction, répulsion, équilibre
- Dérivée du potentiel : force de Lennard-Jones

# Lennard-Jones



# Forces : ressort

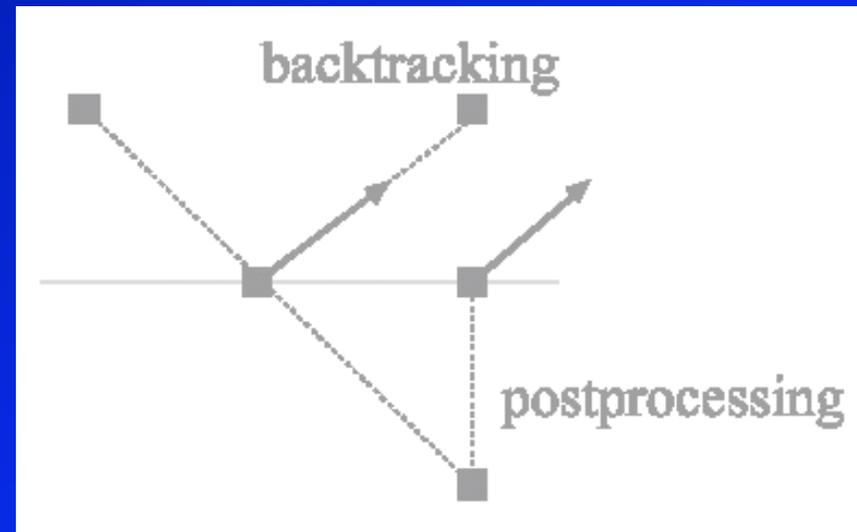
- Force classique des ressorts :

$$f(x_i) = -k(x_i - x_0)$$

- Particule attirée par le point  $x_0$
- Ressort de longueur nulle à l'équilibre

# Collisions

- Pas de collisions entre particules
- Collisions avec l'environnement (sol, murs...)
- Itération dépasse la collision :
  - Pénétration
  - Recul ou interpolation

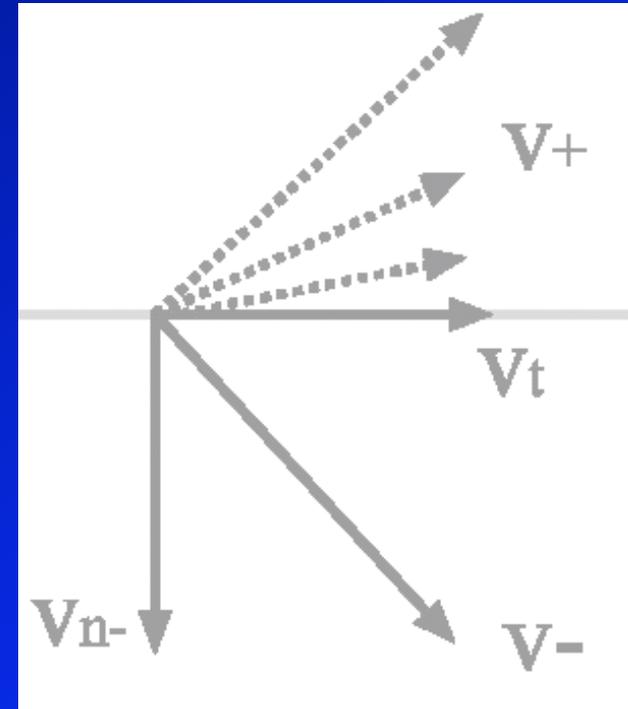


# Effet d'une collision

- Vitesse tangentielle inchangée
- Vitesse normale retournée

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_n$$
$$\vec{v} \perp \vec{v}_t \perp \vec{v}_n$$

– Coefficient de restitution



# Origine des particules

- Générateurs :
  - Attachés au modèle
- Flux de création : particules/seconde
  - $t_{\text{last}}$ , date dernière création de particule

$$n = \lfloor (t - t_{\text{last}}) / \text{rate} \rfloor$$

- Création  $n$  particules,  $t_{\text{last}} = t$  si  $n > 0$
- Distribution (aléatoire) vitesse/position
  - Si  $n > 1$ , étalement de valeurs

# Durée de vie des particules

- Date de création pour chaque particule
- Durée de vie donnée
- Age de la particule :
  - Suppression des particules après la durée de vie
  - Changement de couleur (refroidissement)
  - Changement d'opacité
- Parfois supprimer les particules qui sortent de l'écran

# À chaque étape

- Ajuster l'état des particules
  - Éliminer les particules trop âgées
  - Collisions
  - Créer les nouvelles particules
  - Recalculer les index des particules

# Systemes de particules en pratique

- Grand nombre de particules :  $10^4$ ,  $10^5$ ...
- Code optimisé :
  - Travail direct dans les tableaux
  - Tableau de taille fixé (nb. max particules)
    - Pas besoin de création/destruction, marquer si actif
  - Forces principales « en dur » (gravité...)
- Méthode de résolution simple (Euler ?)
- À pas constant
  - Un pas par image ?

# Plan du cours

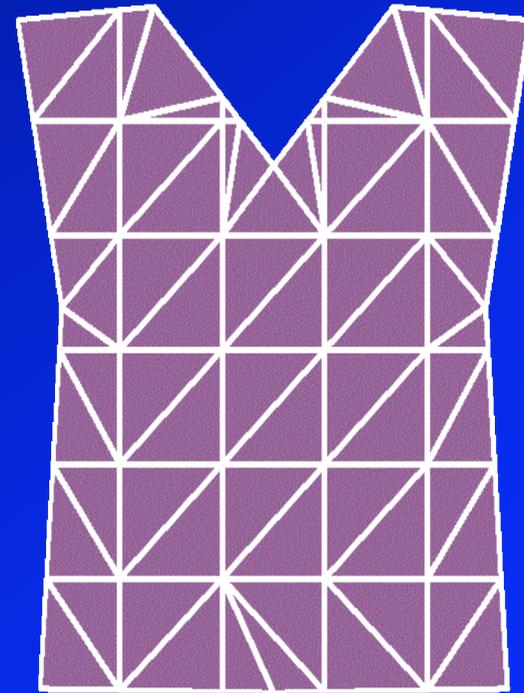
- Systèmes de particules
- **Systèmes masse-ressort**
- Contraintes
- Animations de solides

# Systemes masse-ressort

- Idem systemes de particules
  - Particules appelées « masses »
- Structure donnée
- Les masses font partie du modèle :
  - Pas de création, pas de destruction, pas d'âge
- Ressorts qui relient les masses :
  - Les forces ne sont plus universelles
  - Chaque force connaît les masses sur lesquelles elle agit

# Systemes masse-ressort

- Points en ligne :
  - Cheveux, ressorts, chaines...
- Points sur une surface :
  - Habits, tissus, peau...
- Points dans un reseau 3D :
  - Structures semi-rigides
  - Modeles souples, muscles,...



# Quels ressorts ?

- Ressort vers un point fixe :
  - Attire la masse vers le point  $x_0$
  - Oscillations autour de l'origine

$$f(\mathbf{x}) = -k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

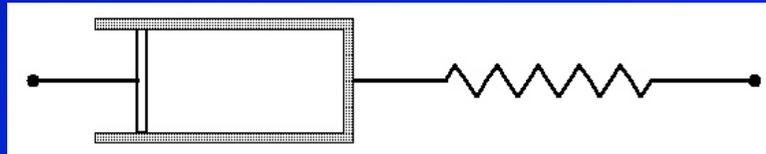
# Ressort amorti

$$f(\vec{x}, \vec{v}) = -k_s \vec{r} - k_d (\vec{v} \cdot \hat{r}) \hat{r}$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

$$\hat{r} = \vec{r} / \|\vec{r}\|$$

- Ressort plus freinage
- Suspension de voiture
- Ralentit les mouvements dans la direction du ressort



# Ressort amorti

- Rapport  $k_s/k_d$  détermine :
  - Sur-amortissement, sous-amortissement, amortissement critique
  - ... si le système est isolé
- Toujours un certain amortissement

# Longueur au repos non-nulle

- Ressort avec longueur au repos non-nulle
  - Pousse/tire la masse à une distance  $d$  de  $\mathbf{x}_0$

$$f(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{v}}) = -k_s(r - d)\hat{\mathbf{r}} - k_d(\vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}$$

$$r = \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_0\|$$

$$\hat{\mathbf{r}} = (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_0)/r$$

# Ressort entre deux masses

$$f_1(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2) = -k_s(r - d)\hat{\mathbf{r}} - k_d((\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2) \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}$$

$$f_2(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2) = -f_1(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \vec{\mathbf{v}}_2)$$

$$r = \|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\|$$

$$\hat{\mathbf{r}} = (\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2)/r$$

- Symétrique
- Forces radiales
- Pousse/tire les masses à une distance  $d$  l'une de l'autre

# Construction avec masse-ressorts

- Connexion des masses pour modéliser



- Les objets peuvent se plier, s'écraser, se tordre



- Liaisons supplémentaires pour rigidité



- Difficile d'avoir le bon comportement

# Masse-ressort

- On peut tout modéliser :
  - Tissus, solides, objets mous, semi-rigides...
  - Rigidité variable
- En théorie, c'est parfait :
  - Si distance entre masses=dist. intra-moléculaires
- En pratique, c'est pas idéal :
  - Parfait si on ne veut modéliser que de la gelée
  - Objets trop rigides :
    - Divergence, petit pas, temps de calcul prohibitif

# Modélisation énergétique

- Plus simple que modélisation masse-ressort
- Fonction énergétique générale :
  - S'applique à tout le modèle
  - Dépend de la position
  - Décrit l'état idéal
- Potentiel lié à cette énergie
- Force dérivant du potentiel
- Appliquée aux particules

# Modélisation énergétique

- Fonction de comportement
  - Dépendant seulement de la position des points
    - Pas de la vitesse
  - $\mathbf{C}(x_0, x_1, \dots, x_n)$
  - $\mathbf{C} = 0$  à l'équilibre
- Énergie de déformation liée à la fonction
  - $E = 1/2 k_s \mathbf{C}^2$
  - $E = 0$ , système à l'équilibre
  - $E > 0$ , énergie de déformation

# Force liée au potentiel

- Force = - gradient de l'énergie potentielle

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} E(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left[ \frac{1}{2} k_s \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^2 \right] \\ &= k_s \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_i} \end{aligned}$$

# Force liée au potentiel

- Avec amortissement :

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= \left[ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right] k_s \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - k_d \frac{d}{dt} \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \left[ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right] \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_i} \\ &= \left[ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right] k_s \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - k_d \sum_j \left[ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right] \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{v}_j \left[ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right] \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_i} \end{aligned}$$

- Description simple d'un système complexe
- Reste à écrire le potentiel...

# Exemples : ressort standard

$$C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| - d = r - d$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_0} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} = \hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_1} = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|} = -\hat{\mathbf{r}}$$

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \left( k_s C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) - k_d \sum_j \frac{\partial C(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{v}_j \right) \\ &= \left( -k_s (r - d) - k_d (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_2) \right) \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

# Exemples : triangle d'aire constante

$$C(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot A$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{a}} = R^{90}(\mathbf{c} \times \mathbf{b})$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{b}} = R^{90}(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$$\frac{\partial C(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} = R^{90}(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

on pose  $\square = (\square k_s C(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \square k_d (\mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) + \mathbf{v}_b \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \mathbf{v}_c \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})))$

$$f_a(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) = \square R^{90}(\mathbf{c} \times \mathbf{b})$$

$$f_b(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) = \square R^{90}(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$$f_c(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b, \mathbf{v}_c) = \square R^{90}(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

# Exemples, suite : tissus

- Modèle 2D, à plat
- Coupé suivant le patron
- Assemblé (cousu) sur le modèle
- Contraintes : le tissu résiste :
  - Étirement
  - Pliage
- Directions privilégiées
- Fonction d'énergie

# Plan du cours

- Systèmes de particules
- Systèmes masse-ressort
- Contraintes
- Animations de solides

# Contraintes multiples

- Contraintes :
  - Restriction sur la position d'un objet
  - Relation entre objets
- Contraintes permanentes
  - *Holonomes* : équation  $C(\dots) = 0$
  - Articulations
- Contraintes temporaires
  - *Non-holonomes* : équation  $C(\dots) \geq 0$
  - Contact, non-pénétration
  - Limites aux articulations

# Masse-ressort ?

- Contraintes par ressorts : *pénalité*
  - Force de rappel vers position équilibre
- Pas idéal :
  - Si position correcte, force de rappel nulle
  - S'il y a une autre force (gravité) on s'écarte
  - Besoin ressort de rappel très rigide
    - Très instable
    - Pas garanti que ça marche

# Satisfaction des contraintes

- Forces de contrainte
- D'abord calculer forces « normales » :
  - Gravité, ressorts, etc
- Puis calculer forces de contrainte
  - Prise en compte de l'effet des forces normales
- Plusieurs contraintes :
  - Chacune tient compte de l'effet des autres
- Ajouter forces de contraintes aux autres forces
  - Simulation normale

# Forces de contrainte

- Contrainte :  $C(\mathbf{x}) = 0$ 
  - Positions autorisées :  $C(x) = 0$
- Vitesses autorisée :  $\dot{C} = 0$
- Accélérations autorisées :  $\ddot{C} = 0$
- Force supplémentaire (force de contrainte) :
  - Calculée pour vérifier  $\ddot{C} = 0$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} (f + \hat{f})$$

# Conservation de l'énergie

- La force de contrainte ne doit modifier l'énergie du système :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2$$

$$\frac{d}{dt} E_c = m \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

- La force de contrainte ne doit pas travailler

# Cas à un corps : perle sur un fil

$$C(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 - d) = 0$$

$$\dot{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\ddot{C}(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\ddot{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{m}(f + \hat{f}) \cdot \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\hat{f} \cdot \mathbf{x} = -f \cdot \mathbf{x} - m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

$$W = \hat{f} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \square_{\mathbf{x}} | \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\hat{f} = \square_{\mathbf{x}}$$

$$\square = \frac{-f \cdot \mathbf{x} - m\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

# Cas général

- Vecteur des positions des particules  $\mathbf{q}$
- Matrice des masses  $\mathbf{M}$ , inverse  $\mathbf{W}$
- Vecteur des forces  $\mathbf{Q}$
- Contrainte  $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ 
  - $\mathbf{C}$  vecteur à  $m$  éléments
  - $\mathbf{q}$  vecteur à  $3n$  éléments

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$$

$$\mathbf{C} = \dot{\mathbf{C}} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}(\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{Q}})$$

$$\ddot{\mathbf{C}} = 0$$

# Trouver la force de contrainte

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\mathbf{C}} = \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J} \mathbf{W} (\mathbf{Q} + \hat{\mathbf{Q}}) = 0$$

$$\mathbf{J} \mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}} = -\dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J} \mathbf{W} \mathbf{Q}$$

$$W = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \dot{\mathbf{x}} \perp \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^T \lambda$$

$$\mathbf{J} \mathbf{W} \mathbf{J}^T \lambda = -\dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J} \mathbf{W} \mathbf{Q}$$

# Stabilité numérique

$$\ddot{\mathbf{C}} = -k_s \mathbf{C} - k_d \dot{\mathbf{C}}$$

$$\mathbf{JWJ}^T \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{JWQ} - k_s \mathbf{C} - k_d \dot{\mathbf{C}}$$

# Plan du cours

- Systèmes de particules
- Systèmes masse-ressort
- Contraintes
- Animations de solides

# Solides

- Presque pareil que les particules
  - $m$  masse totale du solide
  - $\mathbf{r}$  position du centre de gravité
  - $\mathbf{v}$  vitesse du centre de gravité
- Plus termes de rotation :
  - $\mathbf{J}$  tenseur d'inertie (matrice en 3D, scalaire en 2D)
  - $\theta$  orientation du solide (angle en 2D, quat en 3D)
  - $\dot{\theta}$  vitesse de rotation (scalaire en 2D, vecteur en 3D)
- Coordonnées du solide :
  - Origine en  $\mathbf{r}$ , rotation  $\theta$  par rapport au monde
  - Pour tout solide,  $m$  et  $\mathbf{J}$  décrivent mouvement

# Tenseur d'inertie

- Déjà vu ?
- Description de la répartition des masses :

$$3D : \mathbf{J} = \int \rho(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_x r_y & r_x^2 + r_z^2 & -r_y r_z \\ -r_x r_z & -r_y r_z & r_x^2 + r_y^2 \end{pmatrix} d^3 \mathbf{r}$$

$$2D : \mathbf{J} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r}^2 d^2 \mathbf{r}$$

- Densité  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r}$  coordonnées par rapport au centre

# Exemples (densité uniforme)

- Rectangle :

$$I = \frac{1}{3} m (l^2 + w^2)$$

- Disque :

$$I = \frac{1}{2} m r^2$$

- Source de plein d'exercices marrants

# Équation du mouvement des solides

- Équation du mouvement :
- $T$  est le *couple*
  - Torque en anglais

$$\frac{d}{dt}x = v$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \alpha$$

$$\frac{d}{dt}v = m^{-1}F$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \mathbf{J}^{-1}T$$

# Couple (Torque)

- Chaque force  $f$  agit en un point du solide
  - $\mathbf{r}$  vecteur du centre de gravité au point d'action
  - solide.F +=  $f$
  - Solide.T +=  $\mathbf{r} \wedge f$
- Le moment fait tourner le solide
  - Si la force agit au centre de gravité, moment nul
    - Gravitation
  - Si la force pointe vers le centre de gravité, moment nul
  - $f$  en  $\mathbf{r}$  et  $-f$  en  $-\mathbf{r}$  : force nulle, couple non-nul

# Amortissement visqueux

- Dépend de la vitesse linéaire des points

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3D)$$

$$= \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{R}^{90} \mathbf{r} \quad (2D)$$

# Collisions

- Collisions entre deux solides
- Point de collision et vecteur normal
  - Pb complexe, nbx algorithmes
- Collision solide-particule :
  - Se ramener en coordonnées locales au solide
  - Collision en coordonnées locales
  - Impulsion sur le solide
  - Rebond de la particule

# Impulsion

- Impulsion  $I$ , normale à la collision :

$$I = \frac{\epsilon(1 + \epsilon)(v_p - v_s)}{\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_s} + \frac{1}{J_s} (r_s^{tg})^2} \quad (2D)$$

- Effet de l'impulsion :

$$v_p = v_p + \frac{1}{m_p} I$$

$$v_s = v_s + \frac{1}{m_s} I$$

$$\omega_s = \omega_s + \frac{1}{J_s} (r_s \times I)$$

# Résumé

- Systèmes de particules
  - Fluides, poussière, flammes, fumée
  - Oiseaux, poissons...
- Systèmes masse-ressort :
  - Solides, tissus...
  - Énergie de déformation
- Solides :
  - Couple, moment, équation dynamique
  - Contraintes sur les solides
  - Impulsions

# Encore très peu...

- Sujet à peine effleuré
- Contraintes de non-pénétration entre solides
- Quaternions pour les rotations
- Frottements solides