

Résolution des Équations Différentielles

Nicolas Holzschuch
Cours d'Option Majeure 2
Nicolas.Holzschuch@imag.fr

Résolution des Équations Différentielles

- Très inspiré par le cours:
 - A. Witkin & D. Baraff,
Physically Based Modelling,
cours à Siggraph 2001
<http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001/index.html>
(pointeur sur la page web)
- Et surtout :
 - *Differential Equation Basics*
 - *Implicit Methods*

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Retour sur le TD4

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Équations Différentielles Ordinaires

- ODE
 - Ordinary Differential Equations
- Lien entre dérivée et valeur de la fonction

$$f'(x) = F(f(x))$$

- « Ordinaires » : fonction d'une variable
- Différent des EDP
 - Équations aux Dérivées Partielles
 - Fonction de plusieurs variables

Équations Différentielles

- Forme générique ODE premier degré :

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = f(\mathbf{X}(t), t)$$

$$\mathbf{X} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

- Notes:

- t représente le temps
- f variable en fonction du temps
- Parfois \mathbf{Y} au lieu de \mathbf{X} , parfois x au lieu de t, \dots
- Souvent $\mathbf{X}=(x,y)$

À quoi ça sert ?

- À tout... ou presque !
 - Chimie
 - Physique
 - Ingénierie
 - Économie...
- Également en Informatique Graphique :
 - Animation, modélisation, rendu...
- ODE système de base
 - EDP application des méthodes d'ODE

Résolution des Équations Différentielles

- Déjà vues
- Le plus souvent, résolution analytique

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0, \quad y = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

$$\Delta < 0, r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta, \quad y = e^{\alpha x} (p \cos(\beta x) + q \sin(\beta x))$$

$$\Delta = 0, \quad y = (\lambda_1 x + \lambda_2) e^{r_1 x}$$
- Nombreux problèmes sans solution analytique
 - Par ex. pb. à 3 corps
 - Résolution numérique

Résolution numérique

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = f(\mathbf{X}(t), t)$$

- Étant donnée la fonction $f(\mathbf{X}, t)$, calculer $\mathbf{X}(t)$
- Le plus souvent, valeur initiale :
 - Valeur $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$
 - Trouver $\mathbf{X}(t)$ pour $t > t_0$
- Également :
 - problème aux limites, contraintes...

Résolution pour l'animation

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{X}_0 & t &= t_0 \\ \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} &= f(\mathbf{X}(t), t) & t &\geq t_0 \end{aligned}$$

- Pour l'animation, série de valeurs
 - Échantillons de la fonction $\mathbf{X}(t)$
- $$\mathbf{X}(t_i) \quad t_i = t_0, t_1, t_2, \dots$$
- Par exemple, images d'une animation

Champ de vecteurs

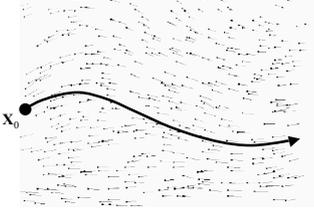
- $f(\mathbf{X}, t)$ est un champ de vecteurs :



- Éventuellement variable en fonction du temps

Champ de vecteurs

- $f(\mathbf{X}, t)$ est un champ de vecteurs :



- $\mathbf{X}(t)$ est un chemin dans le champ
– trajectoire

ODE d'ordre plus élevé

- Par exemple, dynamique = ODE d'ordre 2 :

$$\frac{d^2}{dt^2} x = \frac{1}{m} F$$

- On se ramène à une ODE d'ordre 1 :

$$\frac{d}{dt} x(t) = v(t)$$

$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{1}{m} F(x, v, t)$$

Espace des phases

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m} F(x, v, t) \end{bmatrix}$$

- Equation de degré 1 :
 - À deux dimensions
 - Remplace équation de degré 2 à une dimension

Pour une particule 3D

- ODE, de degré 1, de dimension 6 :

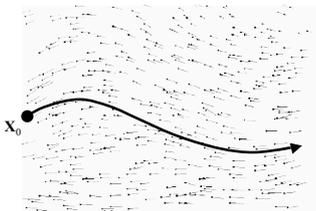
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad f(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \frac{1}{m} F_x(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_y(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_z(\mathbf{X}, t) \end{bmatrix}$$

Pour un ensemble de particules 3D

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \\ v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \\ \vdots \\ p_x^2 \\ p_y^2 \\ p_z^2 \\ v_x^2 \\ v_y^2 \\ v_z^2 \\ \vdots \\ p_x^N \\ p_y^N \\ p_z^N \\ v_x^N \\ v_y^N \\ v_z^N \\ \vdots \end{bmatrix} \quad f(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} v_x^1 \\ v_y^1 \\ v_z^1 \\ \frac{1}{m} F_x^1(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_y^1(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_z^1(\mathbf{X}, t) \\ \vdots \\ v_x^2 \\ v_y^2 \\ v_z^2 \\ \frac{1}{m} F_x^2(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_y^2(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_z^2(\mathbf{X}, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_x^N \\ v_y^N \\ v_z^N \\ \frac{1}{m} F_x^N(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_y^N(\mathbf{X}, t) \\ \frac{1}{m} F_z^N(\mathbf{X}, t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ça reste un chemin

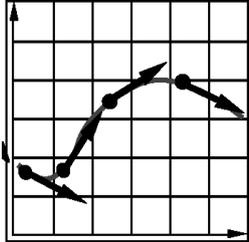
- Chemin dans l'espace des phases :



- Pour nous, c'est un tableau de nombres

Idée intuitive : par étapes

- État courant \mathbf{X} donné
 - Calculer $f(\mathbf{X}, t)$ à l'état courant (ou à proximité)
 - Avancer d'un pas
 - Prendre nouvelle valeur \mathbf{X}
- La plupart des méthodes suivent ce schéma



Note : équations intégrale

- L'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{X}_0 & t = t_0 \\ \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} &= f(\mathbf{X}(t), t) & t \geq t_0 \end{aligned}$$

- Est équivalente à l'équation intégrale :

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t f(\mathbf{X}(t), t) dt \quad t \geq t_0$$

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Méthode d'Euler

- La plus simple
- La plus intuitive
- Pas donné h
- Étant donné $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$, avancer d'un pas :

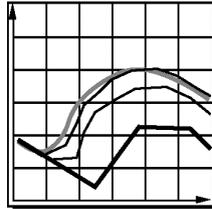
$$t_1 = t_0 + h$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0)$$

- Approximation linéaire par morceaux de la trajectoire

La taille des pas

- Contrôle la précision
- Petits pas :
 - Suit la courbe de plus près
- Pour l'animation :
 - Beaucoup de pas par image



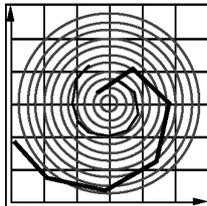
Méthode d'Euler : précision

- Suit la tangente, s'éloigne de la courbe
 - par exemple :

$$f(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

- Solution exacte : un cercle

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} r \cos(t + k) \\ r \sin(t + k) \end{bmatrix}$$



- Euler part en spirale, même avec pas très petit

Méthode d'Euler : instable

$$f(x, t) = -kx$$

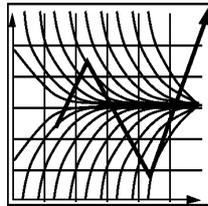
- La solution exacte est une exponentielle :

$$x(t) = x_0 e^{-kt}$$

- En fonction de la taille du pas

$$x_i = x_0(1 - kh)$$

<input type="checkbox"/>	$h \ll 1/k$	ok
<input type="checkbox"/>	$h > 1/k$	oscillations +/-
<input type="checkbox"/>	$h > 2/k$	divergence



- Plus k est grand, plus h doit être petit

Analyse de l'erreur

- Série de Taylor :

$$\mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}(t_0) + h \left(\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{d^3}{dt^3} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} + \dots$$

- La méthode d'Euler approxime linéairement :

$$\mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}(t_0) + hf(\mathbf{X}_0, t_0), \quad \text{Erreur en } O(h^2)$$

- Pas divisé par 2, erreur divisée par 4
- Deux fois plus de pas
- Erreur totale divisée par 2

- Approximation d'ordre 1 : précision en $O(h)$
 - Nombre d'étapes en $1/\text{précision}$

Méthodes d'ordre 2

- Prendre un terme de plus dans la série :

$$\mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}(t_0) + h \left(\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} + O(h^3)$$

- Dérivation :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right) \right)_{t_0} \\ &= \left(\frac{d}{dt} f(\mathbf{X}(t), t) \right)_{t_0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}(t), t) \right)_{\mathbf{X}_0} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} + \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X}_0, t) \right)_{t_0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}(t), t) \right)_{\mathbf{X}_0} f(\mathbf{X}_0, t_0) + \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X}_0, t) \right)_{t_0} \end{aligned}$$

Méthodes d'ordre 2 (suite)

- On ne veut pas calculer les dérivées de $f(\mathbf{X}, t)$
- On utilise encore Taylor :

$$f(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}, t_0 + \Delta t) = f(\mathbf{X}_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}_0, t_0) \Delta \mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X}_0, t_0) \Delta t + O(\Delta^2)$$

- On prend $\Delta x = hf(\mathbf{X}_0, t_0)$, $\Delta t = h$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0), t_0 + h) &= f(\mathbf{X}_0, t_0) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}_0, t_0) hf(\mathbf{X}_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{X}_0, t_0) h + O(h^2) \\ &= h \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X}(t) + O(h^2) \end{aligned}$$

Méthodes d'ordre 2 (suite)

- On combine :

$$\mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}(t_0) + h \left(\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X}(t) \right)_{t_0} + O(h^3)$$

$$h \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X}(t) \Big|_{t_0} = f(\mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0), t_0 + h) - f(\mathbf{X}_0, t_0) + O(h^2)$$

- Posons :

$$\begin{cases} f_0 = f(\mathbf{X}_0, t_0) \\ f_1 = f(\mathbf{X}_0 + hf_0, t_0 + h) \end{cases}$$

- Alors :

$$\mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}_0 + \frac{h}{2} (f_0 + f_1) + O(h^3)$$

- Méthode du *Trapèze*, ou Euler amélioré.

Méthodes d'ordre 2 (suite)

- On aurait pu aussi prendre

$$\Delta x = (h/2)f(\mathbf{X}_0, t_0), \Delta t = h/2 :$$

- Et on réarrange de la même façon, on pose :

$$\begin{cases} f_0 = f(\mathbf{X}_0, t_0) \\ f_m = f(\mathbf{X}_0 + \frac{h}{2} f_0, t_0 + \frac{h}{2}) \end{cases}$$

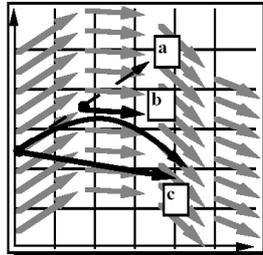
- On obtient :

$$\mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}_0 + hf_m + O(h^3)$$

- Méthode du *point milieu*

Méthodes d'ordre 2

- Point milieu :
 - 1/2 pas Euler
 - Évaluer f en X_m
 - 1 pas avec f_m
- Trapèze :
 - 1 pas Euler
 - Évaluer f_l
 - 1 pas avec f_l
 - Moyenne



Méthode du point milieu

Note : programmation

- Méthode d'Euler
 - appels à $f(X,t)$ pour X sur la position courante
 - f peut utiliser la position courante
 - Variables globales
 - Facile à écrire
- Autres méthodes :
 - Plusieurs appels à $f(X,t)$
 - Par sur la position courante
 - f ne doit pas utiliser ni modifier la position
 - Passage de paramètres
 - Plus difficile à écrire

Efficacité

- Évaluer $f(X,t)$ est l'étape la plus coûteuse
- Méthodes d'ordre 2 font 2 évaluations par pas
 - 2 fois plus cher ?
- À précision donnée :
 - Nombre de pas en $1/\sqrt{\text{précision}}$
 - Résultat : rentable

Runge-Kutta

- Même principe, à des ordres plus élevés
- Ordre 4 :

$$\begin{aligned}f_0 &= f(\mathbf{X}_0, t_0) \\f_1 &= f(\mathbf{X}_0 + \frac{h}{2} f_0, t_0 + \frac{h}{2}) \\f_2 &= f(\mathbf{X}_0 + \frac{h}{2} f_1, t_0 + \frac{h}{2}) \\f_3 &= f(\mathbf{X}_0 + h f_2, t_0 + h) \\ \mathbf{X}(t_0 + h) &= \mathbf{X}_0 + \frac{h}{6} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3)\end{aligned}$$

- C'est ce qu'on utilise en général

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Pas variable

- Comment choisir le pas h ?
 - Trop large : erreurs, instabilité, divergence...
 - Trop petit : on n'avance pas, long temps de calcul
- On veut un pas idéal :
 - Aussi grand que possible sans trop d'erreur
 - Lié aux raideurs des équations
 - Le pas idéal peut varier au cours du temps

Pas variable

- Le pas idéal peut varier, adaptons-nous :
 - grand pas dans les endroits « faciles »
 - petit pas dans les endroits « difficiles »
- Adapter la taille du pas aux difficultés
 - Automatiquement,
 - En cours de résolution, en fonction des calculs
 - Comment décider ?

Pas variable automatique

- On part avec un pas h
 - On fait une itération,
 - On estime l'erreur commise
 - Erreur grande :
 - On diminue h ,
 - On recommence
 - Erreur petite :
 - On accepte le résultat,
 - Éventuellement on augmente h

Comment estimer l'erreur?

- On calcule l'itération par deux méthodes :
 - Euler avec un pas h
 - Euler avec deux pas $h/2$
 - Erreur estimée = différence des deux valeurs :
$$\text{Err} = |\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b|$$
- Ce n'est qu'une estimation :
 - Facile à calculer
 - Peut être prise en défaut
 - Raisonnablement efficace

Choix d'un nouveau pas h

- Pour une méthode d'ordre j , erreur en $O(h^{j+1})$:

- Tolérance donnée tol

$$err = Ch_{old}^{j+1} \quad tol = Ch_{new}^{j+1}$$

$$C \approx \frac{err}{h_{old}^{j+1}} \approx \frac{tol}{h_{new}^{j+1}}$$

$$h_{new} = h_{old} \left(\frac{tol}{err} \right)^{\frac{1}{j+1}}$$

- En pratique :

- On prend h un peu en dessous : $h_{new} = h_{old} (0.8(tol/err))^{\frac{1}{j+1}}$

- On ne change pas trop vite : $h_{new} \in [0.1h_{old}, 2.0h_{old}]$

- On a des limites absolues : $h_{new} \in [h_{min}, h_{max}]$

Pour l'animation

- On a besoin des valeurs à intervalles réguliers

$$t_{f_1}, t_{f_2}, \dots, \quad t_{f_i} = t_{f_{i-1}} + df$$

- On peut s'assurer de ne pas dépasser l'image

$$h \leq \min(h_{min}, t_{f_i} - t)$$

- Valable si $h \ll df$

- On peut dépasser l'image, puis interpoler en arrière :

$$\mathbf{X}(t_{f_i}) = \frac{t_{f_i} - (t - h)}{h} (\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t - h)) \quad t - h < t_{f_i} < t$$

- Valable si $h \ll df$

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

Méthodes implicites

• Exemple du ressort de rappel :

$$f(x,t) = -kx, \quad x(t_0) = c$$

- Décroissance exponentielle
- Toutes les méthodes explicites sont instables pour k grand
- Méthodes à pas variable :
 - N'explose pas
 - Le pas est très petit (temps de calcul très long)

Méthodes implicites

• Autre exemple :

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ ky \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} c \\ 0.00001 \end{bmatrix}$$

- Une particule qui se déplace sur l'axe des x
- y est presque nul, rien ne se passe
- Mais les méthodes explicites doivent travailler à des pas très petits
- On n'avance pas

Équations rigides

• Exemples de systèmes *rigides* :

- Pas de définition simple
 - Terme en $-k$ grand
 - Échelle différente suivant les variables
- Problème difficile et instable
- Souvent avec ressorts de rappel à constante élevée

• À éviter, si possible :

- En général impossible
- Instabilité liée à la partie la plus rigide de la scène

Euler Implicite

- On connaît $\mathbf{X}_0, t_0, h, t_1=t_0+h$
- Méthode d'Euler explicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0)$$

- Méthode d'Euler implicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_1, t_1)$$

- On utilise la dérivée à la fin du pas
- \mathbf{X}_1 est défini par une équation implicite

Euler implicite, suite

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_1, t_1)$$

$$\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}, t_1)$$

$$\Delta \mathbf{X} = hf(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}, t_1)$$

$$\frac{1}{h} \Delta \mathbf{X} = f(\mathbf{X}_0, t_1) + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}, t_1) \right]_{\mathbf{X}_0} \Delta \mathbf{X} + O(\|\Delta \mathbf{X}\|^2)$$

$$\left(\frac{1}{h} \mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1) \right) \Delta \mathbf{X} = f(\mathbf{X}_0, t_1)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \left(\frac{1}{h} \mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1) \right)^{-1} f(\mathbf{X}_0, t_1)$$

Euler implicite, suite

- Méthode d'Euler implicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \left(\frac{1}{h} \mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1) \right)^{-1} f(\mathbf{X}_0, t_1)$$

- Besoin de calculer $\mathbf{J}(\mathbf{X}, t)$ en plus de $f(\mathbf{X}, t)$
- Inversion de matrice $n \times n$ à chaque étape
 - \mathbf{J} souvent creuse, inverse en $O(n)$
 - \mathbf{J} souvent mal conditionnée ou singulière
- Programme plus compliqué
- Mais... système très stable

Stabilité pour Euler implicite

- Décroissance exponentielle :

$$f(x, t) = -kx \quad \mathbf{J}(x, t) = -k$$

- Avec la méthode d'Euler implicite :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \left(\frac{h}{1 + hJ(x_0, t)}\right)^{\text{op}} f(x_0, t) \\ &= x_0 + \left(\frac{h}{1 + h(-k)}\right)^{\text{op}} (-kx_0) \\ &= x_0 + \frac{h}{1 + hk} (-kx_0) \\ &= x_0 \frac{1 - hk}{1 + hk} \end{aligned}$$

- Pas de limites sur h
- Pas arbitrairement grands sans divergence

Précision/stabilité

- On a augmenté la *stabilité*
- La *précision* reste faible
 - Comme l'explicite, d'ailleurs
- Tendance à *couper les tournants* :
 - Spirale vers l'intérieur au lieu de l'extérieur
 - Diminue les hautes fréquences
 - Dans les simulations physiques, dissipation d'énergie

Trapèze implicite

- Trapèze explicite :

$$\mathbf{X}(t_0 + h) = \mathbf{X}_0 + \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + O(h^3)$$

$$\mathbf{X}_1 \approx \frac{h}{2} f(\mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0), t_1) \approx \mathbf{X}_0 + \frac{h}{2} f(\mathbf{X}_0, t_0)$$

- Trapèze implicite :

$$\mathbf{X}_1 \approx \frac{h}{2} f(\mathbf{X}_1, t_1) = \mathbf{X}_0 + \frac{h}{2} f(\mathbf{X}_0, t_0)$$

- Un demi-pas en arrière, un demi-pas en avant
- Rencontre des demi-pas

Trapèze implicite, suite

- Comme pour Euler implicite :

$$\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \frac{h}{2} f(\mathbf{X}_0, t_0) + \frac{h}{2} f(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}, t_1)$$

$$\frac{2}{h} \Delta \mathbf{X} = f(\mathbf{X}_0, t_0) + (f(\mathbf{X}_0, t_0) + \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1) \Delta \mathbf{X}) + O(\Delta \mathbf{X}^2)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \left(\frac{2}{h} \mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1) \right)^{-1} (f(\mathbf{X}_0, t_0) + f(\mathbf{X}_0, t_1))$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \left(\frac{2}{h} \mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_1) \right)^{-1} (f(\mathbf{X}_0, t_0) + f(\mathbf{X}_0, t_1))$$

Point-milieu implicite

- Point-milieu explicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf\left(\frac{1}{2}\mathbf{X}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{X}_0 + hf(\mathbf{X}_0, t_0)), t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

- Point-milieu implicite :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + hf\left(\frac{1}{2}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1), t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

- La tangente au milieu du début et de la fin doit passer par le début et la fin.

Point-milieu implicite, suite

- Comme pour Euler et trapèze :

$$\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + hf\left(\mathbf{X}_0 + \frac{1}{2}\Delta \mathbf{X}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{1}{h} \Delta \mathbf{X} = f\left(\mathbf{X}_0, t_0 + \frac{h}{2}\right) + \mathbf{J}\left(\mathbf{X}_0, t_0 + \frac{h}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\Delta \mathbf{X}\right) + O(\Delta \mathbf{X}^2)$$

$$\Delta \mathbf{X} = \left(\frac{1}{h} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_0 + \frac{h}{2}) \right)^{-1} f\left(\mathbf{X}_0, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \left(\frac{1}{h} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{X}_0, t_0 + \frac{h}{2}) \right)^{-1} f\left(\mathbf{X}_0, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

Runge-Kutta implicite

Équations d'ordre 2

- Théoriquement, doublement de la dimension :

$$\frac{d^2}{dt^2} x = \frac{1}{m} F$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m} F(x, v, t) \end{bmatrix}$$

- Avec méthodes implicites, matrice $2n \times 2n$
 - On peut passer à matrice $n \times n$

ODE d'ordre 2 et méthodes implicites

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} + \Delta \mathbf{V}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} + \Delta \mathbf{V} = h \begin{bmatrix} f(\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0, t_0) \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}, \mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) = f(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \Big|_{\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0} \Delta \mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \Big|_{\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0} \Delta \mathbf{V}$$

$$\frac{1}{h} \Delta \mathbf{V} = f(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \Big|_{\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0} h(\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \Big|_{\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0} \Delta \mathbf{V}$$

$$\frac{1}{h} \Delta \mathbf{V} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \Big|_{\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0} \Delta \mathbf{V} = h \left[f(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}) \Big|_{\mathbf{X}_0, \mathbf{V}_0} (\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V}) \right]$$

- Matrice $n \times n$ avec solution en $\Delta \mathbf{V}$
 - Ensuite, $\mathbf{X} = h(\mathbf{V}_0 + \Delta \mathbf{V})$

Plan

- Retour sur le TD4
- Introduction aux équations différentielles
- Méthodes explicites
- Pas variable
- Méthodes implicites
- Conclusion

En résumé

- Plusieurs méthodes de résolution
 - Il en existe beaucoup d'autres :
 - Méthodes à pas liés : les valeurs voisines ont une influence
 - prédiction/correction, valeurs limites...
 - Ordre adaptatif
- Plus le problème est compliqué, plus il faut comprendre la théorie
 - Beaucoup de théorie
 - Heureusement, il y a la bibliothèque

Comparatif

- Runge-Kutta d'ordre 4 :
 - Souvent la réponse par défaut
 - Bon rapport qualité/prix
 - Mais pas une réponse universelle !
- Euler :
 - Beaucoup de défauts
 - Déconseillée pour presque tout
 - Mais tellement rapide à implémenter
 - Et si ça marche ?

Tout va mal si...

- La fonction f n'est pas lisse
 - Aucune de ces méthodes ne peuvent traiter les discontinuités
 - La taille du pas descend jusqu'au minimum
 - (pour les méthodes à pas adaptatif)
- La solution peut avoir des discontinuités :
 - Choc rigide entre solides, impulsion
 - Comment faire ?

Pour l'animation

- Beaucoup d'applications :
 - Lois de la dynamique appliquées aux objets
 - Animation sans animateur
 - Mais aussi sans contrôle
 - Systèmes de particules : grande dimension
 - L'essentiel : que le mouvement soit beau
 - La précision physique est secondaire
- Un outil, parmi d'autres
