Courbes et Surfaces

Nicolas Holzschuch
Cours d'Option Majeure 2
Nicolas.Holzschuch@imag.fr

Plan

- Pourquoi faire ?
  - Besoins (localité, contrôle…)
  - Principes généraux
- Courbes
  - Bézier, B-splines, NURBS
- Surfaces
- Surfaces de subdivision
  - Courbes
  - Surfaces

Besoins

- Dessiner quelque chose de courbe
  - Lisse, continu, C1, C2…
  - Facilement
  - Contrôler la courbe
- Facilement :
  - Peu de points de contrôle
  - Continuité garantie
- Contrôle :
  - Contrôle local
  - Contrôle direct

Besoins

- Quelque chose qui varie de façon lisse
  - Paramètre (1D), modèle, surface…
  - Question générale en informatique graphique
- Édition locale :
  - Retouches ponctuelles
  - Influence limitée
- Continuité garantie :
  - C1, C2,…

Solution générale

- Courbes polynomiales par morceaux
- Définies par des points de contrôle
  - Nombre de pts de contrôle lié au degré du poly.

Courbes

- Principes généraux
- Bézier/Hermite
- B-Splines
- NURBS

Courbes polynomiales par morceaux

- Polynomes degré 3 (en général)
  - Ttes variantes possible (1, 2, … n …)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 4 points de contrôle :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{41} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés générales

- Enveloppe convexe :
  - $B_i \in [0,1]$: courbe ds env. convexe pts de contrôle
- Contrôle local :
  - Chaque point influence au plus 4 courbes
  - Chaque courbe dépend d'au plus 4 points
- Continuité :
  - Sur chaque morceau de courbe : C
  - Entre les morceaux ?

Courbes de Bézier

- Cas degré 3 :

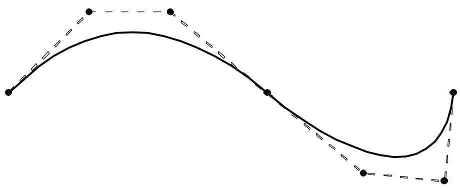
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Dit autrement :

$$P(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t)P_3 + t^3 P_4$$

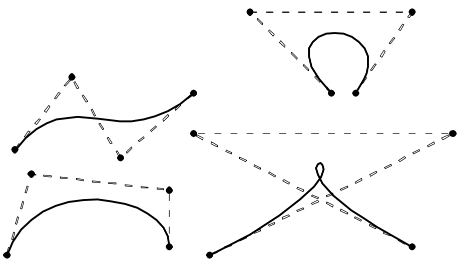
Courbes de Bézier : propriétés

- G'(0) = 3(P1P2), G'(1) = 3(P3P4)
- Tangente
- Continuité

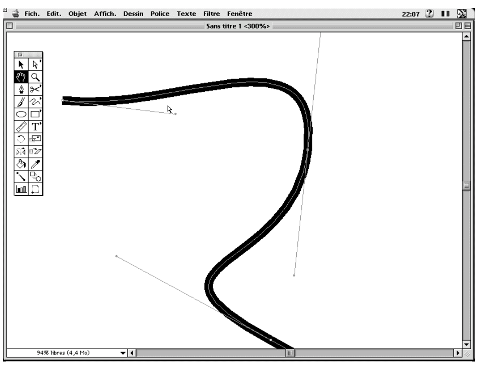


Courbes de Bézier (exemples)

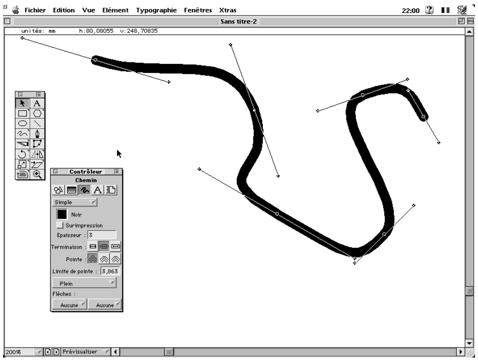
+ application



Courbes de Bézier : Illustrator

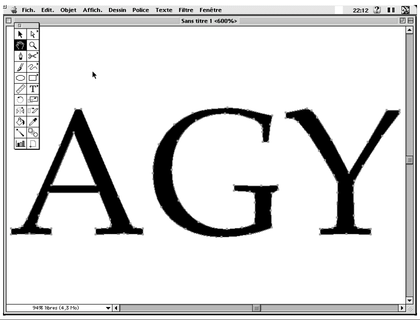


Courbes de Bézier : Freehand



Courbes de Bézier : PS

- Définition des polices Postscript : Bézier degré 2



Courbes de Bézier

- Possible avec degré quelconque :

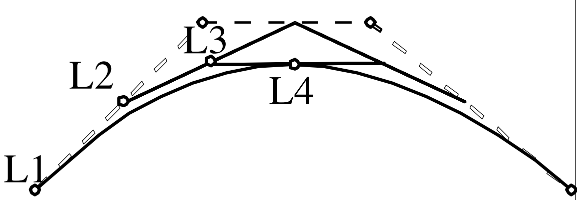
$$P(t) = \sum_{i=0}^{N} C_N^i (1-t)^{N-i} t^i P_i$$

- Polynômes de Bernstein :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{N} B_i^N(t) P_i$$

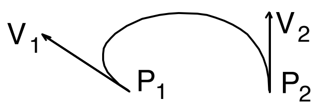
Algorithme de Casteljau

- Subdivision de courbes de Bézier



Hermite

- Autre définition



- Identique Bézier

B-Splines

- Contrôle continu
- Chaque point influence 4 courbes

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i-3} & P_{i-2} & P_{i-1} & P_i \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

B-Splines

- Continuité : C2 par définition
- P(t) = P0*B(t)+P1*B(t-1)+P2*B(t-2)+...
- Contrôle local :
  - Influence sur 4 courbes
- Répétition de points de contrôle
  - Perte de continuité, gain de contrôle

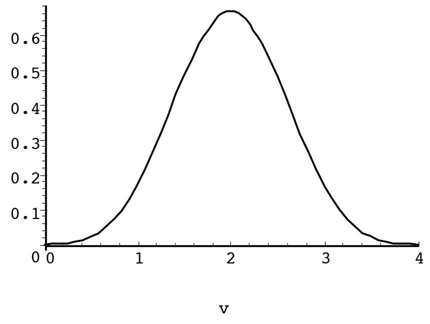
B-Splines : exemples

- Cf. application

B-Splines

- P(t) = P0*B(t)+P1*B(t-1)+P2*B(t-2)+...
- Valable quel que soit le degré
  - B de degré 0 = box function
  - B de degré n = convolution B n-1 avec B0

Cas B degré 3



NURBS

- Non-Uniform Rational B-Splines
- Logiciels de CAD
- Modèle quadriques avec peu de points de contrôle

Re-paramétrisation

- Vitesse uniforme le long de la courbe
- Paramétrisation par abscisse curviligne
  - Échantillonnage, calcul…

Surfaces

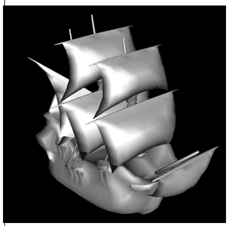
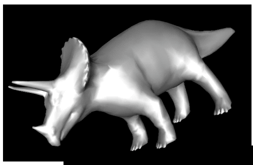
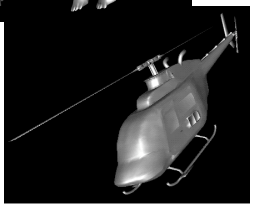
- Principes généraux
- Patch de Bézier, B-splines, NURBS
- Surfaces de subdivision

Surfaces paramétriques

- Idem courbes : polynomial par morceaux
- Produit tensoriel de courbes
  - Bézier, B-splines…
- n^2 points de contrôle par patch
- Continuité : pareil que les courbes

Patches de Bézier

NURBS

Surfaces de subdivision

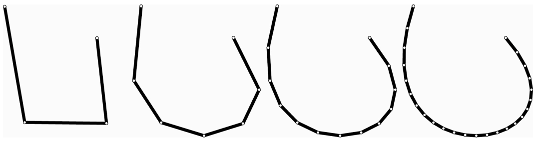
- Principe identique :
  - Maillage de points de contrôle
  - Pas d'expression directe de la courbe
- Raffinement successifs
  - Courbe résultante lisse
  - Nombreuses études mathématiques
- Beaucoup d'avantages

Surfaces de subdivision

- Courbes de subdivision
- Surfaces :
  - Maillage originel :
    - Triangles/quads
  - Règles de subdivision
  - Propriétés de la surface résultat

Courbes de subdivision

- Raffinements successifs :



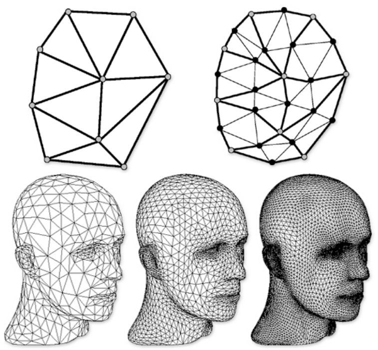
©P.Schröder, 2000

- Nouveaux points :
  - Combinaison linéaire anciens points
  - Ici, 1/16(-1, 9, 9, -1)

Courbes de subdivision

- Maillage original (« points de contrôle »)
- Règle de subdivision
- Application récursive de la règle
- Convergence vers courbe C^n
  - Conditions sur les poids
- Cf. application

Surfaces de subdivision



Surfaces de subdivision

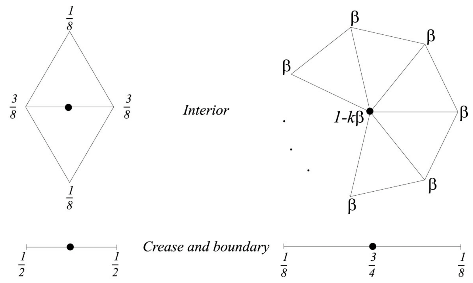
- Maillage original
- Règle de subdivision
- Application récursive de la règle
- Convergence vers surface C^n
- Différents algorithmes

Surfaces de subdivision

Face split		
	Triangular meshes	*Quad. meshes*
Approximating	Loop (C^2)	Catmull-Clark (C^2)
Interpolating	Mod. Butterfly (C^1)	Kobbelt (C^1)

Vertex split
Doo-Sabin, Midedge (C^1)
Biquartic (C^2)

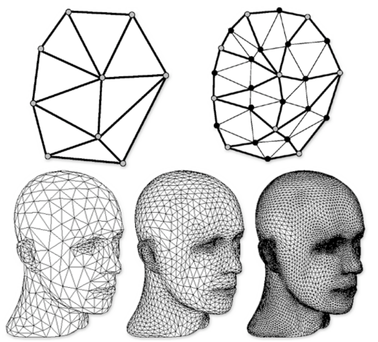
Méthode de raffinement de Loop



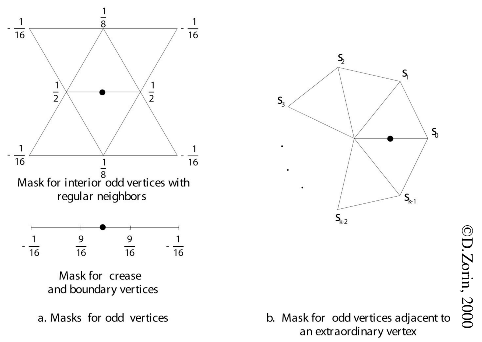
a. *Masks for odd vertices*

b. *Masks for even vertices*

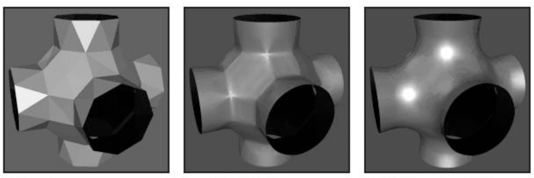
Loop subdivision scheme



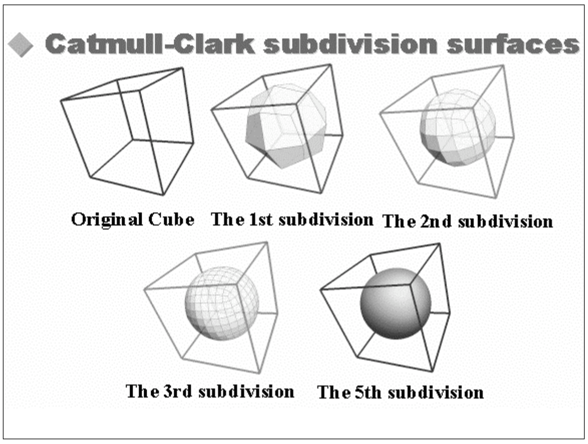
Butterfly subdivision

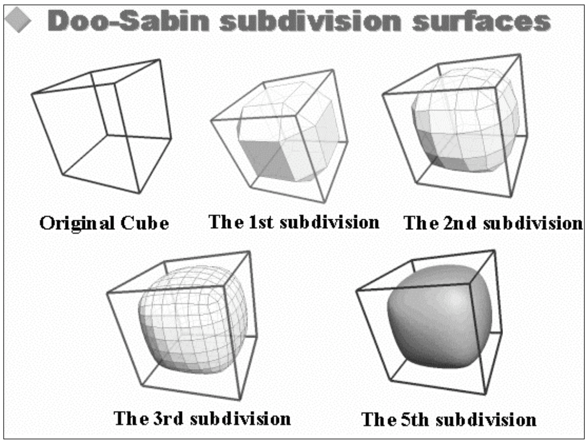


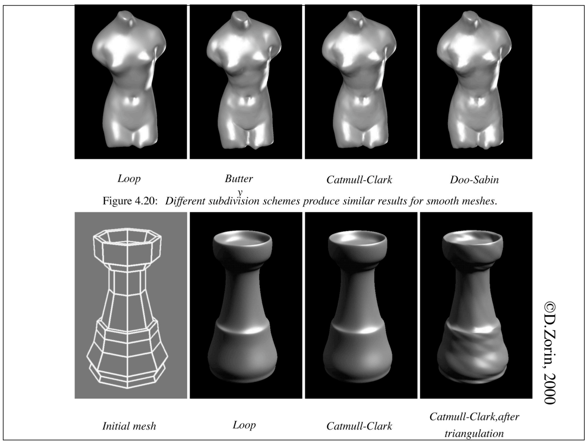
Butterfly subdivision



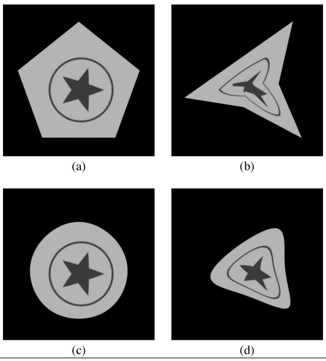
initial mesh | Butterfly subdivision | Modified Butterfly subdivision


Catmull-Clark subdivision surfaces
Original Cube
The 1st subdivision
The 2nd subdivision
The 3rd subdivision
The 5th subdivision


Doo-Sabin subdivision surfaces
Original Cube
The 1st subdivision
The 2nd subdivision
The 3rd subdivision
The 5th subdivision


Loop
Butter
y
Catmull-Clark
Doo-Sabin
Figure 4.20: Different subdivision schemes produce similar results for smooth meshes.
Initial mesh
Loop
Catmull-Clark
Catmull-Clark,after
triangulation
©D.Zorin, 2000

Plaquage de textures



Surfaces de subdivision

- Outil de modélisation puissant
  - Surfaces continues, contrôle local, discontinuités
- Nombreuses questions mathématiques
  - Aire,
  - Propriétés des surfaces,
  - Convergence…
- Domaine de recherche important
  - Complexité mathématique

Pause

- Geri's Game :
  - Première utilisation des surfaces de subdivision
  - Intégration dans l'outil
    - Modélisation, animation, rendu
  - Discontinuités variables